प्रतिदर्श प्रश्न पत्र

2024

विषय–गणित (428)

कक्षा–12

समयः 3 घण्टे　　　　　　　　　　　　　　　　　　पूर्णांकः 80

नोट– (i) इस प्रश्न–पत्र में कुल 24 प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) प्रश्नों हेतु निर्धारित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न को ध्यानपूर्वक पढ़िये तथा समुचित उत्तर दीजिए।

(iv) प्रश्न संख्या 1 बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। इस प्रश्न के प्रत्येक खण्ड के उत्तर में चार विकल्प दिये गए हैं। सही विकल्प अपनी उत्तरपुस्तिका में लिखिए। प्रश्न संख्या 2 से 7 तक निष्चित उत्तरीय प्रश्न हैं।

(v) प्रश्न संख्या 1 का प्रत्येक खण्ड **एक अंक** का है। प्रश्न संख्या 2 से 7 तक **एक अंक** के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 8 से 12 तक **दो अंक** के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 13 से 18 तक **चार अंक** के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 19 से 24 तक **पॉच अंक** के प्रश्न हैं।

(vi) इस प्रश्न–पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है तथापि कतिपय प्रश्नों में आंतरिक विकल्प प्रदान किया गया है। ऐसे प्रश्नों में केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।

---

1. (क) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए– 1

(i) $\frac{3\pi}{4}$　　(ii) $\frac{\pi}{4}$

(iii) $-\frac{\pi}{4}$　　(iv) $\frac{\pi}{3}$

(ख) आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि– 1

(i) AB=BA　　(ii) AB=BA=0

(iii) AB=0, BA=I　　(iv) AB=BA=I

(ग) $\sin x^2$ का x के सापेक्ष अवकलन है– 1

(i) $\cos x^2$　　(ii) $2x\sin x^2$

(iii) $2x\cos x^2$　　(iv) $\cos 2x$

(घ) यदि f(a+b-x)=f(x) , तो $\int_a^b xf(x)dx$ का मान है– 1

(i) 0　　(ii) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)dx$

(iii) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)dx$　　(iv) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

(ङ) e^{x^3} का अवकलन है– 1

(i) $3e^{x^2}$　　(ii) e^{3x^2}

(iii) e^{x^3}　　(iv) $3x^2e^{x^3}$

Downloaded from cclchapter.com

(च) निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है– 1

(i) प्रत्येक सतत् फलन अवकलनीय है। (ii) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् है।

(iii) विकल्प (i) ,एवं (ii) दोनों सही है। (iv) इनमें से कोई भी नहीं।

(छ) यदि $\vec{a}$ और $\overrightarrow{b}$ दो संरेख सदिश हैं तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही नहीं है – 1

(i) $\overrightarrow{b} = \lambda\vec{a}$, किसी अदिश λ के लिए (ii) $\vec{a} = \pm\overrightarrow{b}$

(iii) $\vec{a}$ और $\overrightarrow{b}$ क्रमागत घटक समानुपाती नहीं है।

(iv) दोनों सदिशों $\vec{a}$ और $\overrightarrow{b}$ की दिशा समान है परन्तु परिमाण विभिन्न हैं।

(ज) $\hat{\imath}+2j+3\hat{k}$ की द्विक कोसाइन है– 1

(i) $(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}})$ (ii) $(\frac{1}{14},\frac{2}{14},\frac{3}{14})$

(iii) $(\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, 3\sqrt{14})$ (iv) (1,2,3)

नोट–निम्न प्रश्नों में दो कथनों को अभिकथन (A) और कारण (R) के रूप में चिन्हित किया गया है। अपने उत्तर नीचे दिए गये कोड के अनुसार अंकित करें–

(i) A तथा R दोनों सत्य हैं तथा R, A की सही व्याख्या करता है।

(ii) A तथा R दोनों सत्य हैं तथा R, A की सही व्याख्या नहीं करता है।

(iii) A सत्य है R लेकिन असत्य हैं।

(iv) A तथा R दोनों असत्य हैं।

(झ) **अभिकथन**–किसी वक्र कुल को निरूपित करने वाले अवकलन समीकरण की कोटि उतनी ही होती है जितने उस वक्र कुल के संगत समीकरण में स्वेच्छ अचर होते हैं।

कारण– अवकलन समीकरण की घात वक्र कुलों की संख्या को व्यक्त करती है। 1

(ञ) **अभिकथन**–दो सदिशों को समान कहा जाता है यदि उनकी दिशा समान हो लेकिन परिमाण भिन्न हो।

कारण– एक सदिश राशि की सदैव एक निश्चित दिशा होती है। 1

2. ऐसे सम्बन्ध का उदाहरण दीजिए, जो स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किन्तु सममित न हो। 1

3. $\int_0^1 e^x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

4. यदि y+ $\sin y$=cos x तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 1

5. एक उत्पाद की x इकाईयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपयों में $R(x)=3x^2+6x+5$ से प्रदत्त है। सीमान्त आय ज्ञात कीजिए जब x=12 है। 1

6. Z–अक्ष की दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए। 1

Downloaded from cclchapter.com

7. यदि P(A)=$\frac{3}{5}$ और P(B)=$\frac{1}{5}$, और A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं तो P(A∩B) ज्ञात कीजिए। 1

8. निम्न का मान ज्ञात कीजिए 2

$$\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

9. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x)=4x^3-6x^2-72x+14$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है। 2

10. $\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

11. दिखाइए कि रेखाएं $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं। 2

12. एक पारिवारिक चित्र में माता पिता व पुत्र यादृच्छया खड़े है:

E: पुत्र एक सिरे पर खड़ा है, F: पिता मध्य में खड़े हैं । सप्रतिबन्ध प्रायिकता P(E/F) ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. सिद्ध कीजिए कि– 4

मान लीजिए कि समस्त $n \in \boldsymbol{N}$ के लिए $f(n)=\begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2} & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f: N \rightarrow N$ है। बताइये कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइये।

14. यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2-5A+6I$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

यदि $A=\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए $(AB)'=B'A'$ है।

Downloaded from cclchapter.com

15. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ,ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5 & ; \; x \le 2 \\ ax+b & ; 2 < x < 10 \\ 21 & ; x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन हो। 4

16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{1+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. सदिश $2\,\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} - \hat{k}$ पर इकाई लम्ब सदिश ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

एक समान्तर चतुर्भज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएं सदिश $\vec{a} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित है।

18. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 4

19. निम्नलिखित समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए– 5

$x - y + z = 4$

$2x + y - 3z = 0$

$x + y + z = 2$

20. निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए– 5

$(\text{Sin } x - \text{Cos } x)^{(\sin x - \cos x)}, \; \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

Downloaded from cclchapter.com

अथवा

एक आयत की लम्बाई x, 5 सेमी / मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी / मिनट की दर से बढ़ रही है। जब x=8 सेमी और y= 6 सेमी है, तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

21. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या 1,00,000 है। 2 घण्टों में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घण्टों में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जायेगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती है। 5

अथवा

दर्शाइए कि अवकलन समीकरण $(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए।

22. दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

23. आलेखीय विधि से निम्न अवरोधों के अन्तर्गत Z=x+2y का न्यूनतमीकरण एवं अधिकतमीकरण ज्ञात कीजिए– 5

$x+2y \geq 100$

$2x-y \leq 0$

$2x+y \leq 200$

$X, y \geq 0$

Downloaded from cclchapter.com

24. निम्नलिखित को पढिये और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए– 5

तीन समान बॉक्स दिए गए हैं पहला, दूसरा और तीसरा जिनमें प्रत्येक में दो सिक्के हैं । पहले बॉक्स में दोनों सिक्के सोने के सिक्के हैं, दूसरे बॉक्स में दोनों चांदी के सिक्के हैं और तीसरे बॉक्स में एक सोने और एक चांदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छिक रूप से एक बॉक्स चुनता है और एक सिक्का निकाल लेता है।

उपरोक्त जानकारी के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) पहला बॉक्स चुनने की प्रायिकता क्या है ? 1

(ii) तीसरे बॉक्स से सोने का सिक्का निकलने की प्रायिकता क्या है ? 2

(iii) सोने का सिक्का निकलने की कुल प्रायिकता क्या है ? 2

अथवा

यदि निकाला गया सिक्का सोने का है तो क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का है ?

Downloaded from cclchapter.com