

128

2024-25

गणित

128 (HGH)

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 Hours]

Mathematics

[पूर्णांक : 80
[Max. Marks : 80

निर्देश : (i) इस प्रश्न पत्र में कुल 24 प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

Directions : There are in all 24 questions in this question paper. All questions are compulsory.

(ii) प्रश्नों हेतु निर्धारित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

Marks allotted to the questions are mentioned against them.

(iii) प्रत्येक प्रश्न को ध्यानपूर्वक पढ़िये तथा समुचित उत्तर दीजिए।

Read each questions carefully and answer to the point.

(iv) प्रश्न संख्या 1 बहुविकल्पीय प्रश्न है इस प्रश्न के प्रत्येक खण्ड के उत्तर में चार विकल्प दिए गए हैं। सही विकल्प उत्तर पुस्तिका में लिखिए।

Question No. 1 is multiple choice question. Four options are given in answer of each part of this question. Write correct option in your answer book.

(v) प्रश्न संख्या -1 का प्रत्येक खण्ड एक अंक का है। प्रश्न संख्या 2 से 7 तक एक अंक के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 8 से 12 तक दो अंक के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 13 से 18 तक चार अंक के प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 19 से 24 तक पाँच अंक के प्रश्न हैं। जिसमें प्रश्न संख्या 24 केस/स्रोत आधारित प्रश्न है।

Each part of question No 1 carries one mark. Question No 2 to 7 are of one mark each. Question No. 8 to 12 are of two marks each. Question No 13 to 18 are of four marks each, Question No. 19 to 24 are of five marks each, in which question No.24 is case/source based question.

(vi) इस प्रश्न पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है तथापि कतिपय प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प प्रदान किया गया है। ऐसे प्रश्नों में केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।

There is no overall choice in this question paper, however, an internal choice has been provided in few questions. Attempt only one of the given choice in such questions.

1) (क) यदि $f:N \rightarrow N$ जहाँ $f(x)=x^2, \forall x \in N$ तो f है— 01

If $f:N \rightarrow N$ where $f(x)=x^2, \forall x \in N$, then f is —

- (i) बहुएकी (ii) एकैकी (iii) एकैक आच्छादक (iv) इनमें से कोई नहीं
(i) many-one (ii) one-one (iii) bijective (iv) none of the above

(ख) यदि l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएं तो— 01

If l, m, n are direction cosines of a line, then—

- (i) $l+m+n=0$ (ii) $l+m+n=1$ (iii) $l^2+m^2+n^2=0$ (iv) $l^2+m^2+n^2=1$

(ग) x^2 के सापेक्ष x^7 का अवकलज होगा — 01

Differentiation of x^7 with respect to x^2 will be —

- (i) $\frac{6x^5}{2}$ (ii) $\frac{14x^2}{3}$ (iii) $\frac{7}{2} x^5$ (iv) $\frac{5x^6}{7}$

(घ) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ का मान बराबर है— 01

$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ is equal to —

- (i) $\pi/4$ (ii) $\pi/6$ (iii) $\pi/2$ (iv) $\pi/3$

(ङ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$ तो α का मान है — 01

If $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$ then α is equal to —

- (i) $\pi/6$ (ii) $\pi/3$ (iii) π (iv) $3\pi/2$

(च) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + \sin\left(\frac{dy}{dx} + x\right) = 0$ की घात है। 01

The degree of differential equation $\frac{d^3y}{dx^3} + \sin\left(\frac{dy}{dx} + x\right) = 0$

- (i) 3 (ii) 0 (iii) 1 (iv) परिभाषित नहीं (not defined)

(छ) यदि सदिश $\lambda\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ और $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लम्बवत है तो λ का मान है— 01

If vectors $\lambda\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ are mutually perpendicular then λ is equal to—

- (i) 4 (ii) $5/2$ (iii) 6 (iv) 8

(ज) यदि $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है— 01

The value of $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ is

- (i) 0 (ii) -1 (iii) 1 (iv) 3

निर्देश: प्रश्न संख्या -1 के अगले दो खण्डों में, दो कथनों को अभिकथन(A) तथा कारण (R) के रूप में चिन्हित किया गया है निम्नलिखित विकल्पों (i), (ii), (iii) तथा (iv) में से चुनकर इनका सही उत्तर दीजिए।

Direction: In next two parts of question no. 1, there are two statements labelled as assertion (A) and Reason(R), from the following options (i), (ii), (iii) and (iv), select their correct answer.

(i) A तथा R दोनों सही है तथा R, A की सही व्याख्या करता है।

Both A and R are correct and R, is the correct explanation of A.

(ii) A तथा R दोनों सही है तथा R, A की सही व्याख्या नहीं करता है।

Both A and R are correct and R, is not the correct explanation of A.

(iii) A सही है परन्तु R गलत है।

A is correct but R is incorrect.

(iv) A तथा R दोनों गलत है।

Both A and R are incorrect.

(झ) अभिकथन (A): किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय ₹ से $R(x) = 3x^2 + 26x + 15$ से प्राप्त होती है।

जब $x=15$ तो सीमान्त आय ₹116

कारण (R): सीमान्त आय (MR) बेची गई इकाइयों की संख्या के सम्बन्ध में कुल आय में परिवर्तन की दर है,

$$\text{इसलिए } (MR)_{at x=15} = \frac{dR}{dx} \text{ at } x=15 \quad 01$$

Assertion (A): The total income in rupees received from the sale of x units of a product is given by $R(x) = 3x^2 + 26x + 15$, the marginal income when $x = 15$ is ₹ 116

Reason (R) : Marginal income (MR) is the rate of change of total income with respect to the number of unit sold therefore,

$$(MR)_{at x=15} = \frac{dR}{dx} \text{ at } x=15$$

(ञ) अभिकथन (A): यदि m और n क्रमशः अवकल समीकरण $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = xy$ 01

की कोटि और घात है तब $m+n$ का मान 4 है।

कारण (R): दिये गये अवकल समीकरण की कोटि और घात दोनों 2 है।

Assertion (A): If m and n are the order and degree, respectively of the differential equation $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = xy$ the value of $m+n$ is 4.

Reason (R) : Both order and degree of given differential equation are 2.

2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 01

Evaluate $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

3) यदि E और F दो स्वतन्त्र घटनाएँ हैं और $P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{1}{4}$ तो $P(E \cap F)$ ज्ञात कीजिए। 01

If E and F are independent events and $P(E) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{1}{4}$ find $P(E \cap F)$.

4) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 01

Find the principal value of $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5) $\frac{(\log x)^2}{x}$ का समाकलन ज्ञात कीजिए। 01

Find the integral of $\frac{(\log x)^2}{x}$

6) यदि $x = \sin t$, $y = \cos t$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 01

If $x = \sin t$, $y = \cos t$ then find $\frac{dy}{dx}$

- 7) x , y और z -अक्षों की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए। 01
Find the direction cosine of x , y and z -axis.
- 8) सिद्ध करो कि समुच्चय $\{1,2,3\}$ में $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध स्वतुल्य, परन्तु न तो सममित है और न संक्रामक है। 02
Show that the relation R is the set $\{1,2,3\}$ given by $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$ is a reflexive but neither symmetric nor transitive.
- 9) एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगे वृत्तों में 4 cm/s की गति से चलती है। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है। 02
A stone is dropped into a quiet lake and wave move in a circles at a speed of 4 cm/s . At the instant, when the radius of the circular wave is 10 cm , how fast is the enclosed area increasing.
- 10) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए 02
Find value of $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$

अथवा/Or

$\int x \log x dx$ को हल कीजिए।

Solve $\int x \log x dx$

- 11) P के किस मान के लिए रेखाएं $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ तथा $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{p}$ एक दूसरे पर लम्ब है। 02
Find the values of P , so that the lines $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ तथा $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{p}$ are perpendicular to each other.
- 12) एक पाठशाला में 1000 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 430 लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि 430 में 10% लड़कियाँ कक्षा XII वीं में पढ़ती हैं। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है, यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है। 02
In a school there are 1000 students out of which 430 are girls. Its known that out of 430, 10% of the girls study in class XII, what is the probability, that a student chosen randomly studies in class XII, given that the chosen student is a girl.
- 13) समस्त पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a,b) : a-b \text{ एक पूर्णांक है}\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R का इसकी तुल्यता के लिए परीक्षण कीजिए। 04
- 14) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ और I एक 2×2 क्रम का तत्समक आव्यूह है। तो सिद्ध करो कि $I+A = (I-A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$
If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ and I is a identity matrix of order 2×2 , Show that $I+A = (I-A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ 04

अथवा/Or

एक व्यापार संघ के पास 30000 रूपयों का कोष है, जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बॉण्डों में निवेश करना है। प्रथम बॉण्ड पर 5% वार्षिक तथा दूसरे बॉण्ड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है, आव्यूह गुणन के प्रयोग से यह निर्धारित कीजिए कि 30000 रूपयों के कोष को दो प्रकार के बॉण्डों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटे जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक व्याज (a) ₹ 1800 (b) ₹ 2000 हो।

A trust fund has Rs 30,000 that must be invested in two different types of bond, the first bond pays 5% interest per year, and the second bond pay 7% interest per year, using matrix multiplication, determine how to divide Rs 30,000 among the two types of bond, If the trust fund must obtained an annual total interest of (a) ₹ 1800 (b) ₹ 2000.

- 15) λ के किस मान के लिए $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{if } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=0$ पर संतत है। 04

अथवा/Or

अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन (a) वर्धमान (b) ह्रासमान

Find the interval in which the function f given by $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is (a) strictly increasing (b) strictly decreasing.

- 16) $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 04
Find the integral of $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

अथवा/Or

$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$ का समाकलन कीजिए।

Find the integral of $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

- 17) अ) एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएं सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

द्वारा निर्धारित है।

02

Find the area of a parallelogram whose adjacent side are determined by the vectors $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$

ब) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ पर लम्ब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

02

If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ such that $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ is perpendicular to $\vec{c}$ then find the value of λ .

- 18) रेखाएं जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

04

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ और } \vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

- 19) Find the shortest distance between the line $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$
तीन संख्याओं का योग 6 है। यदि हम तीसरी संख्या को 3 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ते हैं तो हमें 11 प्राप्त होता है। पहली और तीसरी संख्या को जोड़ने से हमें दूसरी संख्या का दुगुना प्राप्त होता है। इसका बीजगणितीय निरूपण करके आव्यूह विधि से संख्याएं ज्ञात कीजिए।

05

The sum of three numbers is 6. If we multiply third number by 3 and add second number to it, we get 11. By adding first and third numbers, we get double of the second number. Represent it algebraically and find the numbers using matrix method.

अथवा/Or

निम्न समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए—

Solve the following system of equations by matrices method—

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

- 20) शत्रु का एक अपाचे हेलीकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है, बिन्दु (3,7) पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से न्यूनतम दूरी पर उस हेलीकॉप्टर को गोली मारना चाहता है। न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

05

An Apache helicopter of enemy is flying along the curve given by $y = x^2 + 7$, A soldier placed at (3,7), wants to shoot down the helicopter when it is nearest to him. Find the nearest distance.

अथवा / Or

सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

Show that the semi-vertical angle of the cone of the maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}\sqrt{2}$.

- 21) किसी बैंक के मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में ₹1000 जमा कराये जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जायेगी? अवकल समीकरण के उपयोग से हल करें। जबकि ($e^{0.5} = 1.648$)

05

In a bank principals increases continuously at the rate 5% per year, An amount of ₹ 1000 deposited with this bank, How much will it worth after 10 years. Solve by using differential equation when ($e^{0.5} = 1.648$)

- 22) दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x+y) dy + (x-y) dx = 0$ समघातीय है और इसका विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जबकि $y = 1$ और $x = 1$

05

Show that the differential equation $(x+y) dy + (x-y) dx = 0$ is homogenous and find the particular solution when $y=1$ and $x=1$.

अथवा / Or

प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 16$, रेखा $y = x$ एवं y -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the bounded by the circle $x^2 + y^2 = 16$, line $y = x$ and y -axis is the first quadrant.

- 23) आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $z = 3x + 9y$ का न्यूनतम तथा अधिकतम मान निम्नलिखित व्यरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए।

05

Determine graphically the maximum and minimum values of the objective subject to the constraint.

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- 24) दो थैले सफेद और हरे रंग के दिये गये हैं। सफेद थैले में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि हरे थैले में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। उपरोक्त घटनाओं को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है—

W : थैले को चुनना जो सफेद रंग का है।

G : थैले को चुनना जो सफेद रंग का है।

यदि लाल रंग की गेंद निकालने को R से निरूपित किया जाय तो उपरोक्त सूचनाओं के आधार पर अग्रलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (i) सफेद रंग के थैले में से लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता।

01

(ii) हरे रंग के थैले में से लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता।

01

(iii) किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो लाल रंग की है, इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद हरे थैले से निकाली गई है।

03

Two bags white and green are given. White bag contain 3 red and 4 black ball while green bag contain 5 red and 6 black balls.

The above events are defined as follows-

W : The event of choosing the white bag

G : The event of choosing the green bag

If event R is defined as the drawn red ball then based on the above information answer the following questions.

(i) Probability of drawing a red ball from white bag.

01

(ii) Probability of drawing a red ball from green bag.

01

(iii) One ball is drawn at random from one of the bag and it is found to a red, find the probability that it was drawn from bag green.

03
